В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

МГУ - ШКОЛЕ

Геометрия

Дидактические материалы

8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ - ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
С. Б. Кадомцев
В. В. Прасолов

Геометрия

Дидактические материалы

8 класс

Москва
«Просвещение»
2011

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Б93

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Бутузов В. Ф.
Б93 Геометрия. Дидактические материалы. 8 класс / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В. В. Прасолов. — М. : Просвещение, 2011. — 63 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-023016-2.

Дидактические материалы ориентированы на учебник В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия, 8» под редакцией В. А. Садовничего.

В них представлены самостоятельные и контрольные работы в нескольких вариантах и различного уровня сложности, а также математические диктанты и примерные задачи к экзамену. Ко всем заданиям даны ответы, а ко многим — указания.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-023016-2

Предисловие

Пособие содержит дополнительный задачный материал по курсу геометрии 8 класса. Оно ориентировано на учебник В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова «Геометрия, 8» под редакцией В. А. Садовничего.

В пособии представлены 11 самостоятельных работ, 4 контрольные работы, 3 математических диктанта, примерные задачи к экзамену по геометрии, тестовые задания и дополнительные задачи.

Самостоятельные работы обозначены буквой С с соответствующим номером. Темы самостоятельных работ (в скобках указаны параграфы и пункты учебника, к которым относятся самостоятельные работы) следующие:

С-1. Параллельные прямые (§ 11, пп. 41—44).

С-2. Вписанная и описанная окружности (§ 12, пп. 46—49).

С-3. Многоугольник (§ 13, пп. 50—52).

С-4. Параллелограмм и трапеция (§ 14, пп. 53—58).

С-5. Теорема Фалеса (§ 15, пп. 59—61).

С-6*. Точки пересечения медиан и высот треугольника (§ 15, пп. 62—65).

С-7. Косинус и синус острого угла (§ 16, пп. 66—70).

С-8. Теоремы синусов и косинусов (§ 17, пп. 72—75).

С-9. Подобные треугольники (§ 18, пп. 78, 79, 81, 82).

С-10. Теоремы об отрезках пересекающихся хорд и о квадрате касательной (§ 18, п. 80).

С-11. Итоговое повторение.

Все самостоятельные работы даются в четырёх вариантах. В каждом варианте 3 задачи, но если на самостоятельную работу отводится меньше 30 минут, то третью задачу нужно исключить и оставить только первые две задачи. Третий и четвёртый варианты, как правило, более сложные, чем первый и второй. Самостоятельная работа по теме «Точки пересечения медиан и высот треугольника» предназначена для наиболее подготовленных классов.

Контрольные работы обозначены буквой К с соответствующим номером. Они предназначены для итоговой проверки знаний по каждой из трёх глав учебника (работы К-1, К-2 и К-3) и по всему курсу геометрии 8 класса (работа К-4). В каждой контрольной работе 4 задачи, причём последняя задача — дополнительная, её рекомендуется предлагать только в наиболее подготовленных классах и оценивать отдельно. Каждая контрольная работа даётся в четырёх вариантах.

Математические диктанты обозначены буквами МД с соответствующим номером: МД-1, МД-2 и МД-3. Они предназначены для итоговой проверки знаний по каждой из трёх глав. Все математические диктанты даются в двух одинаковых по сложности вариантах.

Дополнительные задачи можно предложить для самостоятельной работы учащимся, успешно справляющимся с задачами из учебника. Их можно также использовать для проведения занятий в кружках и при организации факультативов.

В конце книги даны ответы ко всем задачам из самостоятельных и контрольных работ, а также указания к наиболее сложным задачам самостоятельных работ и дополнительным задачам.

Самостоятельные работы

ВАРИАНТ 1

С-1

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $\angle CAO = \angle DBO$. Докажите, что $AC \parallel BD$.
2. Биссектриса внешнего угла с вершиной A треугольника ABC параллельна стороне BC. Найдите угол C, если $\angle BAC = 40°$.
3. Хорда BC окружности параллельна прямой, касающейся окружности в точке A. Докажите, что хорды AB и AC равны.

С-2

1. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите угол OAC, если $\angle B = 80°$.
2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в её середине. Докажите, что $AB = BC$.
3. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, описанный около данной окружности.

С-3

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и AD равны, $\angle BAC = \angle EAD$ и $\angle ACB = \angle ADE$. Докажите, что $BC = ED$.
2. Может ли сторона правильного n-угольника быть равна радиусу описанной около него окружности?
3. Выпуклый n-угольник разрезан диагоналями, пересекающимися только в вершинах, на 5 треугольников. Найдите n. Ответ обоснуйте.

С-4

1. Одна сторона параллелограмма втрое больше другой стороны. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 24 см.
2. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A из вершины B проведён перпендикуляр BH к прямой AD. Найдите углы параллелограмма, если $AH = BH$.
3. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°, а меньшее основание и меньшая боковая сторона равны по 2 см. Найдите большее основание.

С-5

1. Диагональ трапеции делит её среднюю линию на отрезки 3 см и 4 см. Найдите основания трапеции.
2. Острый угол равнобедренной трапеции равен 60°, боковая сторона равна 8 см, а большее основание равно 12 см. Найдите среднюю линию трапеции.
3. Диагонали выпуклого четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, равны.

С-6*

1. Медианы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. В каком отношении отрезок B_1C_1 делит отрезок MA?
2. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Найдите угол B, если $\angle AHC + \angle HAB = 180°$.
3. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABH, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

C-7

1. Найдите углы прямоугольного треугольника, катеты которого равны 1 и $\sqrt{3}$.

2. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной $2\sqrt{3}$ см.

3. Две окружности имеют общий центр. Радиус одной окружности равен 5 см, а другой — 3 см. Найдите длину хорды большей окружности, касающейся меньшей окружности.

C-8

1. В треугольнике ABC углы A и B равны 45° и 15°. Найдите сторону AB, если $BC = 2$.

2. Квадрат наибольшей стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других его сторон. Определите вид этого треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 21$ см и $BC = 28$ см проведена биссектриса CD. Найдите AD и DB.

C-9

1. Стороны AB и AC треугольника ABC разделены точками M и N в отношении 2 : 3, считая от точки A. Найдите MN, если $BC = 20$.

2. Два угла треугольника равны 30° и 50°. Докажите, что биссектриса наибольшего угла треугольника отсекает от него подобный ему треугольник.

3. Выразите высоту прямоугольного треугольника, проведённую к гипотенузе, через его катеты a и b.

С-10

1. Две окружности касаются прямой AB в точке A и расположены по разные стороны от этой прямой. Через точку B проведены две прямые, первая из которых пересекает одну окружность в точках C и D, а вторая пересекает другую окружность в точках E и F. Докажите, что если $BC = BE$, то $BD = BF$.
2. Треугольник ABC, стороны AB и AC которого относятся как $1 : 3$, вписан в окружность. Точка D — середина дуги BC. Отрезки AD и BC пересекаются в точке K, и через эту точку проведена хорда EF. Найдите BK и KC, если $KE = 3$ см и $KF = 4$ см.
3. Хорда AB окружности, перпендикулярная к диаметру CD, пересекает его в точке E. Найдите радиус окружности, если $AB = DE$ и $CE = 2$ см.

С-11

1. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на одной из его сторон и удалён от двух других сторон на 2 см и $2\sqrt{3}$ см. Найдите радиус этой окружности.
2. Из вершины C прямого угла треугольника ABC проведена высота CH. Найдите гипотенузу AB, если $AC = 20$ см и $AH = 16$ см.
3. Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны 6 см и 8 см. Найдите биссектрису AD.

ВАРИАНТ 2

С-1

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.
2. В треугольнике ABC углы A и B равны $100°$ и $40°$ соответственно. Докажите, что биссектриса внешнего угла с вершиной A параллельна стороне BC.
3. На окружности отмечены точки A, B и C так, что $AB = AC$. Докажите, что прямая, касающаяся окружности в точке A, параллельна прямой BC.

С-2

1. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите угол OCA, если $\angle B = 50°$.
2. Окружность касается сторон AB, BC и CA треугольника ABC в точках K, L и M соответственно, причём $MK = ML$. Докажите, что $AB = BC$.
3. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной около него окружности.

С-3

1. Все стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны и $\angle A = \angle D$. Докажите, что $BF = CE$.
2. Может ли сторона правильного n-угольника быть вдвое больше радиуса вписанной в него окружности?
3. Выпуклый n-угольник разрезан диагоналями, пересекающимися только в вершинах, на 4 треугольника. Найдите n. Ответ обоснуйте.

С-4

1. Один из углов параллелограмма на 50° меньше другого. Найдите углы параллелограмма.
2. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A из вершины B проведён перпендикуляр BH к прямой AD. Найдите углы параллелограмма, если $AH = \frac{1}{2}AB$.
3. В прямоугольной трапеции острый угол равен 60°, а меньшее основание и бóльшая боковая сторона равны по 2 см. Найдите большее основание.

С-5

1. Основания трапеции равны 4 см и 6 см. Найдите отрезки, на которые диагональ трапеции делит её среднюю линию.
2. Острый угол равнобедренной трапеции равен 45°, большее основание равно 12 см, а расстояние между прямыми, содержащими основание, равно 4 см. Найдите среднюю линию трапеции.
3. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны. Докажите, что диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

С-6*

1. Медианы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Прямая BM пересекает прямую, проходящую через точку A параллельно прямой BC, в точке D. Найдите отношение $BM : MD$.
2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC с углом B, равным 135°. Найдите угол HAB.
3. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABH, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ACH.

С-7

1. Найдите углы прямоугольного треугольника, катет и гипотенуза которого равны 1 и $\sqrt{2}$.

2. Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной $\sqrt{3}$ см.

3. Две окружности имеют общий центр. Радиус большей окружности равен 13 см, а хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности, равна 24 см. Найдите радиус меньшей окружности.

С-8

1. В треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена биссектриса CD. Найдите AD, если $AC = 6$ и $\angle B = 75°$.

2. Квадрат одной из сторон треугольника больше суммы квадратов двух других его сторон. Определите вид этого треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 5$ см и $BC = 12$ см проведена биссектриса CD. Найдите AD и DB.

С-9

1. Стороны AB и AC треугольника ABC разделены точками M и N в отношении $3 : 2$, считая от точки A. Найдите BC, если $MN = 12$.

2. Два угла треугольника равны 60° и 80°. Докажите, что биссектриса наибольшего угла отсекает от него подобный ему треугольник.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу проведённая к ней высота.

С-10

1. Две окружности касаются прямой AB в точке A и расположены по одну сторону от этой прямой. Через точку B проведены две прямые, первая из которых пересекает одну окружность в точках C и D, а вторая пересекает другую окружность в точках E и F. Докажите, что если $BC = BE$, то $BD = BF$.
2. Треугольник ABC, стороны AB и AC которого относятся как $2 : 3$, вписан в окружность. Точка D — середина дуги BC. Отрезки AD и BC пересекаются в точке K, и через эту точку проведена хорда EF. Найдите BK и KC, если $KE = 3$ см и $KF = 8$ см.
3. Две окружности касаются прямой в точке A и расположены по разные стороны от этой прямой. Через точку A проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Через точку B проведена касательная BP ко второй окружности, а через точку C — касательная CQ к первой окружности, P и Q — точки касания. Докажите, что $BP^2 + CQ^2 = BC^2$.

С-11

1. Центр окружности, вписанной в треугольник ABC с прямым углом C, удалён от вершин A и C на 5 см и $3\sqrt{2}$ см. Найдите отрезки, на которые делит катет AC точка его касания с вписанной окружностью.
2. Из вершины C прямого угла треугольника ABC проведена высота CH. Найдите отрезок AH, если $BC = 15$ см и $AB = 25$ см.
3. Катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны 9 см и 12 см. Найдите биссектрису BD этого треугольника.

ВАРИАНТ 3

С-1

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Известно, что $AC \parallel BD$ и точка O — середина отрезка AB. Докажите, что точка O — середина отрезка CD.
2. На плоскости отмечены точки A, B, C и D так, что $\angle ABC = 80°$ и $\angle BCD = 100°$. Могут ли прямые AB и CD быть не параллельными?
3. Отрезок BD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием BC. Докажите, что $BD < 2CD$.

С-2

1. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите угол OAC, если $\angle B = 120°$.
2. Окружность, вписанная в треугольник ABC с углами $40°$, $60°$ и $80°$, касается сторон в точках L, M и N. Найдите углы треугольника LMN.
3. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, и C_1 так, что $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CB_1 = CA_1$. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной в треугольник окружности с его сторонами.

С-3

1. В пятиугольник $ABCDE$ можно вписать окружность. Докажите, что $AB + CD + EA > BC + DE$.
2. Сторона AB четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, является диаметром этой окружности. Из точек A и B проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к прямой CD. Докажите, что $B_1C = A_1D$.
3. Докажите, что выпуклый многоугольник не может иметь более четырёх углов, каждый из которых меньше $108°$.

С-4

1. Докажите, что четырёхугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

2. Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 12 см. Найдите боковую сторону трапеции.

3. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры являются вершинами квадрата.

С-5

1. Средняя линия трапеции равна 6, а разность её оснований равна 4. Найдите основания этой трапеции.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей четырёхугольника $ABCD$, равен отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD. Докажите, что $AD \perp BC$.

3. Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

С-6*

1. Через точку M пересечения медиан AA_1 и BB_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AB. В каком отношении она делит отрезок A_1B?

2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC, HBC, AHC и ABH пересекаются в одной точке.

3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC с углом A, равным 45°. Докажите, что $AH = BC$.

С-7

1. Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 28 см, а боковая сторона равна 15 см. Найдите синус острого угла трапеции.

2. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите остальные стороны треугольника.

3. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Докажите, что $AC^2 + BC^2 = 5AB^2$.

С-8

1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle A = 80°$, $\angle B = 40°$ и $AB = 3$.

2. Стороны треугольника равны 5, 7 и 8. Найдите средний по величине угол этого треугольника.

3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.

С-9

1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и CD пересекаются в точке F. Докажите, что треугольники ABE и FCE подобны.

2. На медиане AM треугольника ABC отмечена точка K. Прямые BK и CK пересекают стороны AC и BC в точках B_1 и C_1. Докажите, что $BC \parallel B_1C_1$.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH и из точки H проведены перпендикуляры HB_1 и HC_1 к прямым AC и AB. Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны.

С-10

1. Две окружности касаются друг друга изнутри в точке A, причём радиус одной окружности в два раза больше радиуса другой. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке C. Через точку C проведена хорда DE большей окружности. Найдите BC, если $CD = 2$ и $CE = 8$.
2. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что $AC \cdot AD \cdot BM = BC \cdot BD \cdot AM$.
3. На продолжении основания BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D. Отрезок AD пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Докажите, что $AB^2 = AE \cdot AD$.

С-11

1. Основания AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равны 10 и 8, высота BH треугольника ABD равна 4. Где расположен центр описанной около трапеции окружности — внутри трапеции, вне её или на её стороне?
2. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D. Найдите расстояние между точками касания прямой CD с окружностями, вписанными в треугольники ACD и BCD, если $AD = a$ и $BD = b$.
3. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, вписан квадрат, который имеет с треугольником общий прямой угол, а одна из вершин квадрата лежит на гипотенузе. Найдите сторону квадрата.

ВАРИАНТ 4

С-1

1. Через середину O отрезка с концами на параллельных прямых проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках A и B. Докажите, что точка O — середина отрезка AB.
2. Точки A и B лежат на одной из двух параллельных прямых, а точки C и D — на другой, причём $BC \parallel AD$. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ равны.
3. Диаметрами четырёх окружностей служат стороны четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что общая хорда окружностей с диаметрами AB и BC и общая хорда окружностей с диаметрами CD и DA параллельны или лежат на одной прямой.

С-2

1. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите угол OAC, если $\angle B = 130°$.
2. Три окружности с центрами в вершинах треугольника ABC попарно касаются друг друга в точках, лежащих на сторонах этого треугольника. Докажите, что окружность, проходящая через точки касания, вписана в треугольник ABC.
3. Основание AB равнобедренного треугольника ABC делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной в него и описанной около него окружностей. Найдите углы треугольника ABC.

С-3

1. В шестиугольник $ABCDEF$ можно вписать окружность. Докажите, что $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.
2. Диагональ AC четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, является диаметром этой окружности. Из точек A и C проведены перпендикуляры AA_1 и CC_1 к прямой BD. Докажите, что $BC_1 = AD_1$.
3. Докажите, что у выпуклого многоугольника не может быть более пяти углов, каждый из которых меньше $120°$.

C-4

1. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки A_1 и C_1 так, что $AA_1 = CC_1$. Докажите, что четырёхугольник A_1BC_1D — параллелограмм.
2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикуляр, проведённый из вершины B к прямой AD, делит большее основание AD на отрезки длиной 3 см и 7 см. Найдите основания трапеции.
3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ вне его построены правильные треугольники BCK и DCL. Докажите, что треугольник AKL равносторонний.

C-5

1. Разность оснований трапеции равна 8 см, а её средняя линия равна 9 см. Найдите основания трапеции.
2. Стороны AD и BC четырёхугольника $ABCD$ лежат на перпендикулярных прямых. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD.
3. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

C-6*

1. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. На отрезке AB_1 отмечена точка P так, что $B_1P : PA = 1 : 2$. Докажите, что прямые MP и AB параллельны.
2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC, HBC, AHC и ABH совпадают.
3. Точка H — ортоцентр треугольника ABC с углом A, равным 135°. Докажите, что $AH = BC$.

С-7

1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.

2. Сторона треугольника равна $1 + \sqrt{3}$, прилежащие к ней углы равны 60° и 45°. Найдите остальные стороны треугольника.

3. Найдите отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон.

С-8

1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle A = 10°$, $\angle B = 20°$ и $AB = 6$.

2. Стороны треугольника равны 3, 5 и 7. Найдите наибольший угол этого треугольника.

3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 39 см, 39 см и 30 см.

С-9

1. Боковая сторона и основание равнобедренного треугольника равны 100 см и 60 см. Найдите расстояние между точками касания вписанной окружности с боковыми сторонами.

2. Может ли медиана разделить треугольник на два подобных, но неравных треугольника?

3. Высота остроугольного треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых равны a и b. Отрезок высоты от ортоцентра до указанной стороны равен d. Найдите эту высоту.

С-10

1. Две окружности касаются друг друга изнутри в точке A, причём радиус одной окружности в три раза больше радиуса другой. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке C. Через точку C проведена хорда DE большей окружности. Найдите BC, если $CD = 3$ и $CE = 6$.
2. Продолжения хорд AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что $AC \cdot AD \cdot BM = BC \cdot BD \cdot AM$.
3. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D. Луч AD пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Докажите, что $AB^2 = AE \cdot AD$.

С-11

1. Основания AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равны 10 и 6, высота BH треугольника ABD равна 3. Где расположен центр описанной около трапеции окружности — внутри трапеции, вне её или на её стороне?
2. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC - BC = 2$.
3. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$ так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC, а вершины R и S — на стороне BC. Выразите сторону квадрата через сторону BC, равную a, и проведённую к ней высоту, равную h.

Контрольные работы

К-1

ВАРИАНТ 1

1. Могут ли две стороны треугольника быть параллельными одной прямой?

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $MN \parallel AC$. Найдите угол CNM, если $\angle C = 70°$.

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Докажите, что если отрезок AD — медиана треугольника, то $AB = AC$.

4. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Найдите углы треугольника, если $\angle BAO = 20°$ и $\angle CAO = 30°$.

К-1

ВАРИАНТ 2

1. Прямая параллельна стороне AB угла ABC. Пересекает ли она прямую BC?

2. Угол ABC равен 64°. Прямая, проходящая через точку A параллельно прямой BC, пересекает биссектрису угла ABC в точке D. Найдите углы треугольника ABD.

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Докажите, что если луч AD — биссектриса угла треугольника, то $AB = AC$.

4. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Найдите углы BAO и CAO, если $\angle A = 60°$ и $\angle B = 40°$.

К-1

ВАРИАНТ 3

1. Внешние углы треугольника ABC с вершинами A и B равны 130° и 140°. На сторонах AC и BC отмечены точки M и N так, что $MN \parallel AB$. Найдите углы треугольника CMN.

2. Окружность касается сторон AB, BC и CA треугольника ABC в точках K, L и M соответственно, причём $MK = ML$. Докажите, что луч KM — биссектриса угла AKL.

3. Прямая пересекает боковую сторону AC, основание BC и продолжение боковой стороны AB (за точку B) равнобедренного треугольника ABC в точках K, L и M соответственно. Найдите угол A, если известно, что треугольники BML и CKL равнобедренные.

4. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках L, M и N. Докажите, что треугольник LMN остроугольный.

К-1

ВАРИАНТ 4

1. На медиане BM равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка E и через неё проведены прямые, параллельные сторонам AB и BC. Эти прямые пересекают отрезки AM и CM в точках F и G соответственно. Докажите, что $AF = CG$.

2. Окружность касается сторон AB, BC и CA треугольника ABC в точках K, L и M соответственно, причём луч KM — биссектриса угла AKL. Докажите, что $AB = BC$.

3. Прямая пересекает боковую сторону AC, основание BC и продолжение боковой стороны AB (за точку B) равнобедренного треугольника ABC в точках K, L и M соответственно. Найдите угол MBC, если известно, что треугольники BML и CKL равнобедренные.

4. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и AC в точках L, M и N. Найдите угол LMN, если $\angle A = 80°$.

К-2

ВАРИАНТ 1

1. В шестиугольнике $ABCDEF$ равны стороны AB и AF, диагонали AC и AE и углы BAC и EAF. Докажите, что $BC = EF$.
2. Докажите, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$.
3. Найдите углы вписанного четырёхугольника $ABCD$, если $\angle ABD = 48°$, $\angle DAC = 36°$ и $\angle BDC = 53°$.
4. Одно из оснований трапеции в два раза больше другого, а средняя линия равна 12 см. Найдите основания трапеции.

К-2

ВАРИАНТ 2

1. Все стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны друг другу и $\angle A = \angle D$. Докажите, что $BF \parallel CE$.
2. Докажите, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $AB \parallel CD$ и $\angle A = \angle C$.
3. На большем основании AD трапеции $ABCD$ отмечена точка E так, что $BE \parallel CD$. Найдите углы трапеции, если $\angle ABE = 50°$ и $\angle AEB = 70°$.
4. Отрезок AB — диаметр окружности, расстояние от середины хорды BC до прямой AB равно 1 см. Найдите хорду AC, если $\angle BAC = 30°$.

К-2

ВАРИАНТ 3

1. Докажите, что оси симметрии правильного многоугольника пересекаются в одной точке.
2. Докажите, что сумма углов при меньшем основании трапеции больше, чем при большем.
3. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ с острым углом A проведён перпендикуляр BH к прямой AD. Найдите угол C, если $BH = \frac{1}{2}AB$.
4. Точки A, B, C и D — середины сторон четырёхугольника, взятые последовательно, P и Q — середины его диагоналей. Докажите, что $\triangle BCP = \triangle DAQ$.

К-2

ВАРИАНТ 4

1. Докажите, что правильный $2n$-угольник имеет центр симметрии.
2. Угол A параллелограмма $ABCD$ меньше угла B. Докажите, что $BD < AC$.
3. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося при этом параллелограмма, если боковая сторона треугольника равна a.
4. Точки A, B, C и D — взятые последовательно середины сторон четырёхугольника, отличного от трапеции и параллелограмма, точки P и Q — середины диагоналей. Докажите, что $\triangle APQ = \triangle CQP$.

К-3

ВАРИАНТ 1

1. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $\sqrt{3}$. Найдите AB, если $\angle A = 70°$ и $\angle B = 50°$.
2. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 120°, если две другие стороны равны 5 и 3.
3. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 24, боковая сторона равна 25. Найдите расстояние между прямыми, содержащими основания трапеции.
4. Через точку A_1, делящую сторону BC треугольника ABC в отношении $BA_1 : A_1C = 1 : 3$, проведена прямая, параллельная медиане BB_1. В каком отношении она делит сторону AC?

К-3

ВАРИАНТ 2

1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, в котором $AB = 1$ см, $\angle A = 20°$ и $\angle B = 10°$.
2. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла, косинус которого равен $-0,2$, если две другие стороны равны 5 и 4.
3. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 17, боковая сторона равна 13. Найдите расстояние между прямыми, содержащими основания трапеции.
4. Через точку A_1, делящую сторону BC треугольника ABC в отношении $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, проведена прямая, параллельная медиане BB_1. В каком отношении она делит сторону AC?

К-3

ВАРИАНТ 3

1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD, равны.
2. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной a, и основанием, равным b.
3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD, если $BC = a$ и $\angle ADB = \alpha$.
4. В треугольник вписана окружность радиуса 3. Найдите стороны треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки, равные 4 и 3.

К-3

ВАРИАНТ 4

1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD, равны, то $AB = BC$.
2. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a, и основанием, равным b.
3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Найдите сторону BC, если расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD, равно d и $\angle ADB = \alpha$.
4. В прямоугольный треугольник с катетами $AC = 7$ и $BC = 24$ вписана окружность. Найдите расстояние от её центра до вершины A.

К-4

ВАРИАНТ 1

1. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMND$ — параллелограмм.

2. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC на отрезки $BE = a$ и $EC = b$. Найдите стороны параллелограмма.

3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причём $AO : OB = DO : OC$. Докажите, что $\angle DAO = \angle CBO$.

4. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями, равными 4 и 8, и боковыми сторонами, равными 2 и 5.

К-4

ВАРИАНТ 2

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, $\angle B = 60°$, $\angle ACB = 50°$ и $\angle ACD = 70°$. Докажите, что $AD = BC$.

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точка E — середина стороны AB. Найдите периметр параллелограмма, если $AE = 4$ см и $EO = 6$ см.

3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причём $\angle DAO = \angle CBO$. Докажите, что $AO : OB = DO : OC$.

4. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями, равными 2 и 5, и боковыми сторонами, равными 2 и 4.

К-4

ВАРИАНТ 3

1. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MD = DN : NA$. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм.

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 2$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1?

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и ACD, касаются прямой AD в одной и той же точке.

4. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до прямой, содержащей высоту, проведённую к гипотенузе.

К-4

ВАРИАНТ 4

1. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, проходящего через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям.

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1?

3. В равнобедренном треугольнике основание равно 48, а боковая сторона равна 30. Найдите расстояние между центрами описанной около треугольника и вписанной в него окружностей.

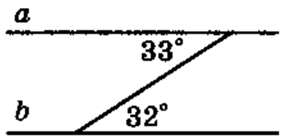
4. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 24, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2 : 3. Найдите стороны треугольника.

Математические диктанты

МД-1

ВАРИАНТ 1

1. Начертите две прямые и секущую по отношению к ним. Отметьте два накрест лежащих угла.
2. На плоскости изображены три прямые: прямая a перпендикулярна к прямой b, прямая b перпендикулярна к прямой c. Как расположены по отношению друг к другу прямые a и c?
3. На сколько частей разбивают плоскость три попарно параллельные прямые?
4. Пересекаются ли прямые a и b, изображённые на рисунке?



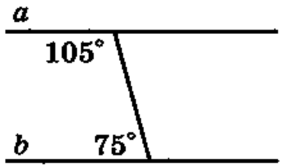
5. Начертите четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.
6. Начертите две параллельные прямые и изобразите множество всех точек, равноудалённых от этих прямых.
7. Биссектрисы треугольника ABC, в котором $\angle A = 80°$, пересекаются в точке O. Угол BOC равен...
8. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, в котором $\angle A = 80°$. Угол BOC равен...

МД-1

ВАРИАНТ 2

1. Начертите две прямые и секущую по отношению к ним. Отметьте два односторонних угла.
2. На плоскости изображены три прямые: прямая a параллельна прямой b, прямая b перпендикулярна к прямой c. Как расположены по отношению друг к другу прямые a и c?

3. На сколько частей разбивают плоскость две параллельные прямые и пересекающая их прямая?
4. Пересекаются ли прямые a и b, изображённые на рисунке?



5. Начертите четырёхугольник, у которого две стороны параллельны и две другие стороны также параллельны.
6. Начертите прямую и отрезок. Изобразите множество всех точек, удалённых от данной прямой на расстояние, равное длине данного отрезка.
7. Биссектрисы треугольника ABC, в котором $\angle A = 40°$, пересекаются в точке O. Угол BOC равен...
8. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, в котором $\angle A = 40°$. Угол BOC равен...

МД-2

ВАРИАНТ 1

1. Как называется отрезок, соединяющий несоседние вершины многоугольника?
2. Начертите шестиугольник, стороны которого попарно параллельны.
3. Периметр ромба равен 40 см. Чему равна его сторона?
4. Диагонали параллелограмма равны. Как называется такой параллелограмм?
5. Один из углов параллелограмма равен 90°. Является ли этот параллелограмм прямоугольником?
6. Сколько осей симметрии имеет равносторонний треугольник?
7. Отрезок, соединяющий середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$, равен 3 см. Длина диагонали BD равна...
8. Основания трапеции равны 5 см и 7 см. Чему равна её средняя линия?

МД-2

ВАРИАНТ 2

1. Как называется отрезок, соединяющий соседние вершины многоугольника?
2. Начертите восьмиугольник, стороны которого попарно параллельны.
3. Одна из диагоналей прямоугольника равна 4 см. Чему равна вторая диагональ?
4. Диагонали параллелограмма перпендикулярны. Как называется такой параллелограмм?
5. Две смежные стороны параллелограмма равны. Является ли этот параллелограмм ромбом?
6. Сколько осей симметрии имеет квадрат?
7. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 7 см. Отрезок, соединяющий середины сторон AB и AD, равен...
8. Одно из оснований трапеции равно 6 см, а средняя линия равна 5 см. Чему равно другое основание трапеции?

МД-3

ВАРИАНТ 1

1. Угол A треугольника ABC прямой. Отношению каких сторон треугольника равен косинус угла B?
2. Чему равен косинус угла в 120°?
3. Косинус острого угла равен 0,6. Чему равен синус этого угла?
4. Угол A ромба $ABCD$ равен α, сторона ромба равна a. Чему равна диагональ AC?
5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 10$ см проведена высота $BH = 12$ см. Чему равны синусы углов A и ABH?
6. Стороны треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Чему равен синус наименьшего угла этого треугольника?
7. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $MN \parallel BC$. Чему равен отрезок AN, если $AM = 5$, $AB = 8$ и $NC = 6$?
8. Стороны треугольника равны 13, 13 и 24. Радиус вписанной в треугольник окружности равен...

МД-3

ВАРИАНТ 2

1. Угол B треугольника ABC прямой. Отношению каких сторон треугольника равен синус угла C?
2. Чему равен косинус угла в 135°?
3. Синус острого угла равен 0,8. Чему равен косинус этого угла?
4. Угол A ромба $ABCD$ равен α, его диагональ AC равна d. Чему равна сторона ромба?
5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 48$ см проведена высота $BH = 7$ см. Чему равны синусы углов A и ABH?
6. Стороны треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Чему равен синус среднего по величине угла этого треугольника?
7. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $MN \parallel BC$. Чему равен отрезок NC, если $AM = 6$, $MB = 4$ и $AC = 20$?
8. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Радиус вписанной в треугольник окружности равен...

Примерные задачи к экзамену

Параллельные прямые

1. Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что $AD \parallel BC$.

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, прямые AD и BC параллельны и $AD = BC$. Докажите, что $\triangle AOD = \triangle BOC$.

3. Две параллельные прямые пересечены секущей. Найдите угол между биссектрисами односторонних углов.

4. Секущая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B. Биссектриса одного из образовавшихся углов с вершиной B пересекает прямую a в точке C. Найдите AC, если $AB = 1$ см.

Вписанная и описанная окружности

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC со сторонами $AB = 9$, $BC = 6$ и $CA = 11$, касается стороны AC в точке P. Найдите AP.

6. Около треугольника ABC с углом A, равным $50°$, описана окружность с центром O. Найдите угол OBC.

7. Точка O — центр окружности, описанной около неравнобедренного треугольника ABC. Биссектриса угла ABC пересекает эту окружность в точке D. Докажите, что прямая OD параллельна высоте треугольника, проведённой к стороне AC.

8. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, касается стороны AB в точке P. Найдите отношение боковой стороны к основанию, если $AP : PB = 3 : 2$.

9. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в него. Найдите углы этого треугольника.

10. Точки касания сторон треугольника с окружностью, вписанной в него, делят окружность на дуги в отношении 10 : 11 : 15. Найдите углы этого треугольника.

Многоугольник

11. Можно ли отметить 4 вершины правильного двенадцатиугольника так, чтобы они были вершинами квадрата?

12. Докажите, что у выпуклого пятиугольника с равными углами нет параллельных сторон.

13. Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его углы пополам. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

14. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle AOB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

15. Биссектрисы углов A и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что угол, смежный с углом AOC, равен полуразности углов B и D.

16. Докажите, что точка пересечения диагоналей A_1A_6 и A_2A_9 правильного двенадцатиугольника $A_1A_2 \ldots A_{12}$ лежит на диагонали A_3A_{12}.

Параллелограмм и трапеция

17. Один из углов параллелограмма в 3 раза меньше другого угла. Найдите углы параллелограмма.

18. Найдите углы ромба, одна из диагоналей которого равна его стороне.

19. В трапецию $ABCD$ с основанием AD вписана окружность с центром O. Найдите угол AOB.

20. Трапеция $ABCD$ с основанием AD вписана в окружность с центром O. Найдите углы трапеции, если $\angle AOD = 100°$, $\angle BOC = 80°$ и точка O лежит внутри трапеции.

21. Трапеция $ABCD$ с основанием AD вписана в окружность с центром O. Найдите углы трапеции, если $\angle AOD = 100°$, $\angle BOC = 80°$ и точка O лежит вне трапеции.

22. Точки B_1 и C_1 симметричны вершинам B и C треугольника ABC относительно точки A. Докажите, что четырёхугольник BCB_1C_1 — параллелограмм.

Теорема Фалеса

23. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 10$ см, $BA_1 = 3$ см и $CB_1 = 4$ см.

24. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от прямой, удалены от неё на 6 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до этой прямой.

25. Концы отрезка, пересекающего прямую, удалены от неё на 6 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до этой прямой.

26. Найдите отношение меньшего основания трапеции к большему, если её диагонали делят среднюю линию на 3 равные части.

27. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна к её основанию AD. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от точек B и D.

28. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B отмечена точка D так, что $DB = AB$. Отрезок, соединяющий точку D с серединой стороны AC, пересекает сторону BC в точке E. Найдите отношение $BE : EC$.

29. Середины сторон выпуклого пятиугольника последовательно соединены отрезками. Найдите периметр полученного пятиугольника, если сумма длин диагоналей исходного пятиугольника равна d.

Косинус и синус острого угла

30. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 20, а боковая сторона равна 13. Найдите косинус угла при большем основании трапеции.

31. Найдите синус угла, косинус которого равен $\frac{8}{17}$.

32. Найдите тангенс острого угла, синус которого равен $\frac{20}{29}$.

33. Найдите косинус угла, тангенс которого равен $\frac{9}{40}$.

Теоремы синусов и косинусов

34. Найдите углы треугольника, стороны которого равны $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и 2.

35. Найдите углы треугольника, стороны которого равны 1, $\sqrt{3}$ и 2.

36. Стороны треугольника равны 8 см, 15 см и 17 см. Найдите его наибольший угол.

37. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 и 8 и углом между ними, равным 60°.

Подобные треугольники

38. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E так, что $BE : EC = 4 : 7$. Прямые DE и AB пересекаются в точке F. Найдите AF, если $AB = 21$ см и $EC = 7$ см.

39. В треугольнике ABC сторона BC равна 9 см. Найдите длину отрезка с концами на сторонах AB и AC, параллельного стороне BC и проходящего через точку пересечения медиан треугольника ABC.

40. На стороне CD квадрата $ABCD$ со стороной 1 отмечена точка E так, что $CE : ED = 1 : 2$. Найдите расстояние от точки C до прямой AE.

41. Методом подобия постройте треугольник по периметру и двум углам.

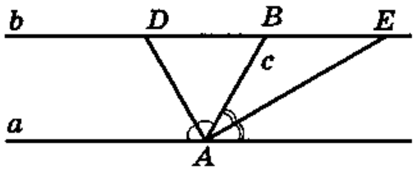
42. Через середину M хорды AB окружности проведена хорда CD. Найдите хорду AB, если $CM = a$ и $DM = b$.

43. Через точку A проведены прямая, касающаяся окружности в точке B, и секущая, пересекающая окружность в точках C и D. Найдите длину отрезка AB, если $AC = \frac{2}{3}AB$ и $AD = 9$ см.

44. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке O. Найдите отрезок AC, если $AB = a$, $OA = b$, $OB = c$ и $CD = d$.

Тестовые задания

1. На рисунке секущая c пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B, биссектрисы двух смежных углов, образованных прямыми a и c, пересекают прямую b в точках D и E. Найдите DE, если $AB = 4$.



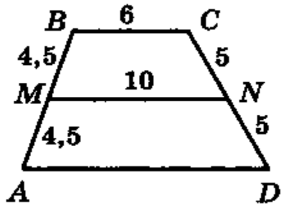
   А. Найти нельзя.
   Б. 2.
   В. 4.
   Г. 8.

2. Число диагоналей многоугольника равно 14. Сколько у него сторон?
   А. 6.
   Б. 7
   В. 8.
   Г. 9.

3. Найдите угол C ромба $ABCD$, если $\angle BAC = 35°$.
   А. 40°.
   Б. 65°.
   В. 70°.
   Г. 80°.

4. Угол A ромба $ABCD$ равен 150°. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, равен 3. Найдите периметр ромба.
   А. 12.
   Б. 18.
   В. 24.
   Г. 36.

5. Исходя из рисунка, найдите основание AD трапеции $ABCD$.



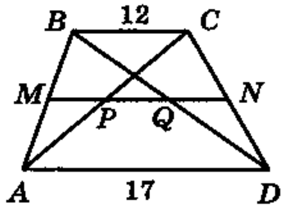
А. 13.

Б. 14

В. 15,5.

Г. 16.

6. На рисунке изображена трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 17$ и $BC = 12$; MN — её средняя линия. Найдите отрезок PQ.



А. 2.

Б. 2,5.

В. 3.

Г. 5.

7. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько существует параллелограммов с вершинами в данных точках?

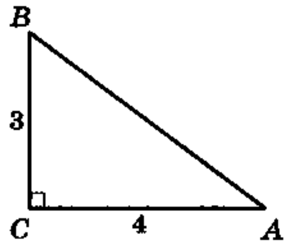
А. 1.

Б. 2.

В. 3.

Г. 4.

8. Исходя из рисунка, найдите тангенс угла B.



А. $\frac{4}{5}$.

Б. $\frac{3}{5}$.

В. $\frac{3}{4}$.

Г. $\frac{4}{3}$.

9. Даны три стороны треугольника. Какой из треугольников с данными сторонами является прямоугольным?

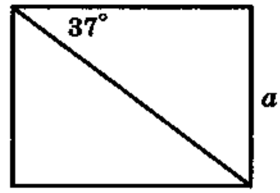
А. 9, 15, 17.

Б. $\sqrt{11} + \sqrt{3}$, $\sqrt{11} - \sqrt{3}$, 2,8.

В. $\sqrt{11} + \sqrt{3}$, $\sqrt{11} - \sqrt{3}$, $\sqrt{28}$.

Г. 6, 17, 18.

10. Периметр прямоугольника, изображённого на рисунке, равен 20. Найдите a.



А. $\dfrac{10}{1+\operatorname{ctg} 37°}$.

Б. $\dfrac{10}{\operatorname{ctg} 37°}$.

В. $\dfrac{20}{\operatorname{tg} 37°}$.

Г. $\dfrac{10}{1+\operatorname{tg} 37°}$.

11. Прямая AB касается окружности с центром O в точке A. Найдите радиус окружности, если $\angle AOB = 30°$ и $BO = 6$.

А. 3.

Б. $3\sqrt{3}$.

В. 6.

Г. $3\sqrt{2}$.

12. Найдите тангенс острого угла, если его синус равен $\dfrac{12}{13}$.

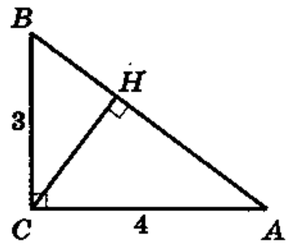
А. $\dfrac{13}{12}$.

Б. $\dfrac{5}{12}$.

В. $\dfrac{12}{5}$.

Г. $\dfrac{13}{5}$.

13. Исходя из рисунка, найдите высоту CH.



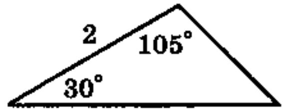
А. 2,5.

Б. $\sqrt{3}$.

В. $2\sqrt{2}$.

Г. 2,4.

14. Исходя из рисунка, найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 30°.



А. 1.

Б. $\sqrt{2}$.

В. $2\sqrt{2}$.

Г. $3\sqrt{2}$.

15. Стороны треугольника равны 3 и 4, а заключённый между ними угол равен 60°. Найдите третью сторону треугольника.

А. $2\sqrt{3}$.

Б. $\sqrt{13}$.

В. $\sqrt{15}$.

Г. 5.

16. Стороны треугольника равны 11, 8 и 6, а стороны подобного ему треугольника равны 9, 12 и x. Найдите x.

А. 16,5.

Б. 17.

В. 17,5.

Г. 22.

Дополнительные задачи

Глава 4

1. Можно ли расположить на плоскости 9 прямых так, чтобы каждая из них пересекала ровно 6 других?
2. Прямая касается окружности, описанной около треугольника ABC, в точке A и пересекает прямую BC в точке E; отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.
3. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках A_1 и B_1. Докажите, что прямая A_1B_1 перпендикулярна к биссектрисе угла C.
4. В остроугольном треугольнике ABC, вписанном в окружность с центром O, проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что прямые CO и A_1B_1 взаимно перпендикулярны.
5. Докажите, что биссектрисы двух углов с соответственно параллельными сторонами могут быть расположены одним из трёх способов: 1) параллельны; 2) принадлежат одной прямой; 3) взаимно перпендикулярны.
6. Докажите, что биссектрисы двух углов с соответственно перпендикулярными сторонами могут быть расположены одним из трёх способов: 1) параллельны; 2) принадлежат одной прямой; 3) взаимно перпендикулярны.
7. а) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственные углы (т. е. углы A и A_1, B и B_1, C и C_1) равны или составляют в сумме 180°. Докажите, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$.

   б) Докажите, что при пересечении трёх прямых, перпендикулярных к сторонам треугольника ABC и не проходящих через одну точку, образуется треугольник, углы которого равны углам треугольника ABC.
8. В треугольнике ABC проведена высота BD и из точки D проведён перпендикуляр DE к прямой AB. Верно ли, что углы BAC и BDE равны? Верно ли, что эти углы либо равны, либо составляют в сумме 180°?

9. Через точку пересечения биссектрисы угла B треугольника ABC и биссектрисы внешнего угла с вершиной C проведена прямая, параллельная BC. Она пересекает прямые AB и AC в точках M и N. Докажите, что $MN = |BM - CN|$.

10. В треугольнике ABC угол B равен 60°, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

11. В треугольнике ABC углы B и C равны 40°; отрезок BD — биссектриса треугольника. Докажите, что $BD + DA = BC$.

12. Сторона BC треугольника ABC наименьшая. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE, равные BC. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ADE, равен расстоянию между центрами окружностей, описанной около треугольника ABC и вписанной в него.

Глава 5

13. В окружность вписаны трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

14. Может ли один из углов выпуклого четырёхугольника быть больше суммы трёх остальных углов?

15. Стороны одного выпуклого четырёхугольника соответственно равны сторонам другого выпуклого четырёхугольника. Следует ли отсюда, что эти четырёхугольники равны?

16. Разрежьте треугольник на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

17. Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются в точке, лежащей на втором её основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.

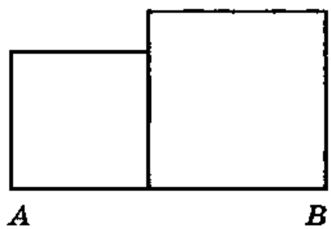
18. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная AB к окружности S_1, а через точку P — прямая CD, параллельная AB (точки B и C лежат на S_2, точка D — на S_1). Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

19. Докажите, что если у 17-угольника есть ось симметрии, то она проходит через одну из его вершин.

20. На плоскости отмечены точки A, B, C и D, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Известно, что $AB = CD$ и $BC = AD$. Следует ли из этого, что $AB \parallel CD$? Верно ли, что $\angle ABC = \angle ADC$?

21. На каждой стороне одного параллелограмма лежит ровно одна вершина другого параллелограмма. Докажите, что эти параллелограммы имеют общий центр симметрии.

22. Две стороны двух квадратов составляют отрезок AB и ещё одна сторона является частью другой стороны, как показано на рисунке. Найдите расстояние от середины отрезка, соединяющего центры квадратов, до прямой AB, если $AB = a$.



23. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы углов, смежных с углами A и B трапеции, пересекаются в точке P, а биссектрисы углов, смежных с углами C и D, пересекаются в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна половине периметра трапеции.

24. Сумма углов при основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

25. В данный треугольник ABC впишите ромб так, чтобы одной из вершин ромба была точка A, а три остальные вершины лежали по одной на каждой стороне треугольника.

26. Внутри данного угла отмечена точка. Постройте отрезок с концами на сторонах угла, который этой точкой делится пополам.

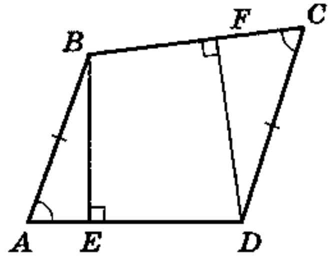
27. Стороны трапеции равны 4 см, 6 см, 6 см и 10 см. Найдите её среднюю линию.

28. Прямая касается окружности, описанной около треугольника ABC, в точке A и пересекает прямую BC в точке E; отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что прямая, проходящая через точку D параллельно прямой AE, касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

29. Прямые, содержащие высоты остроугольного треугольника, делят плоскость на три пары равных углов. Найдите эти углы, если углы треугольника равны α, β и γ.

30. Прямые, содержащие высоты тупоугольного треугольника, делят плоскость на три пары равных углов. Найдите эти углы, если углы треугольника равны α, β и γ.

31. Найдите ошибку в следующем рассуждении: «Докажем, что если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и два противоположных угла равны, то этот четырёхугольник является параллелограммом. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $\angle A = \angle C$. Докажем, что он является параллелограммом. Проведём перпендикуляры BE и DF. Прямоугольные треугольники ABE и CDF равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $BE = DF$. Проведём диагональ BD. Прямоугольные треугольники BDE и BDF равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $BF = DE$. Так как $AE = FC$ и $BF = DE$, то $AD = BC$. Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны, и поэтому он является параллелограммом».



32. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. На прямой AB отмечена точка M так, что $\angle AMO = \angle MAD$. Докажите, что точка M равноудалена от точек C и D.

Глава 6

33. Докажите, что произведение двух сторон треугольника равно произведению диаметра описанной около него окружности на высоту, проведённую к третьей стороне.

34. В треугольнике ABC проведена высота BH. Докажите, что $AB^2 - BC^2 = AH^2 - HC^2$.

35. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D так, что $DB : AB = DC : AC$. Верно ли, что отрезок AD — биссектриса треугольника?

36. Три окружности, радиусы которых равны 1, 2 и 3, касаются друг друга извне. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

37. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, расположен внутри треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC.

38. Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность диаметра d. Докажите, что $AB^2 + CD^2 = d^2$.

39. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведены перпендикуляры AM и AN к прямым BC и CD. Докажите, что $\triangle ABC \backsim \triangle MAN$.

40. Диагональ AC квадрата $ABCD$ является гипотенузой прямоугольного треугольника ACK, причём точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $BK = \dfrac{|AK - CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK = \dfrac{AK + CK}{\sqrt{2}}$.

41. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если ортоцентр треугольника лежит на вписанной в него окружности.

42. Стороны параллелограмма равны a и b, а диагонали равны c и d. Один из углов параллелограмма равен 45°. Докажите, что $a^4 + b^4 = c^2d^2$.

43. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

Ответы и указания

Самостоятельные работы

С-1

Вар. 1. **2.** 70°. **3.** Указание. Воспользоваться теоремой об угле между касательной и хордой.

Вар. 2. **1.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle AOC = \triangle BOD$. **2.** Указание. Сначала доказать, что внешний угол с вершиной A вдвое больше угла B. **3.** См. указание к задаче 3 из варианта 1.

Вар. 3. **1.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle AOC = \triangle BOD$. **2.** Да, могут (рис. 1). **3.** Указание. Отметить на стороне AB такую точку E, что $ED \parallel BC$, и воспользоваться неравенством треугольника применительно к треугольнику BDE.

Вар. 4. **1.** Указание. Пусть C и D — концы данного отрезка, причём точки A и C лежат на одной из параллельных прямых. Сначала доказать, что $\triangle AOC = \triangle BOD$. **2.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABD = \triangle CDB$. **3.** Указание. Сначала доказать, что обе хорды перпендикулярны к прямой AC.

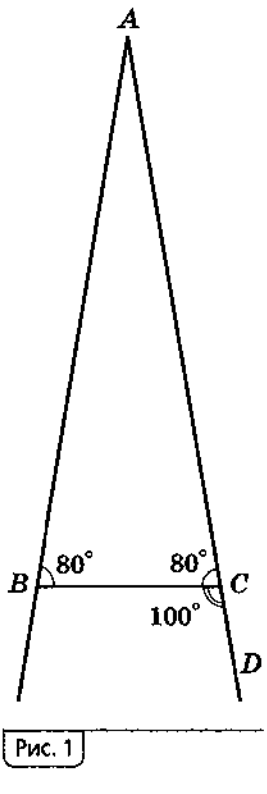


Рис. 1

С-2

Вар. 1. **1.** 10°. **2.** Указание. Пусть окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Воспользоваться тем, что $CA_1 = CB_1 = AB_1 = AC_1$. **3.** Указание. Сначала провести произвольный радиус, затем построить два радиуса, образующие с ним углы в 135°, и через концы радиусов провести касательные к окружности.

Вар. 2. 1. 40°. 2. Указание. Сначала доказать, что $\angle AMK = \angle CML$. 3. Указание. Провести окружность данного радиуса и построить серединный перпендикуляр к хорде, равной данному основанию треугольника.

Вар. 3. 1. 30°. 2. 50°, 60° и 70°. Указание. Сначала найти углы при основаниях равнобедренных треугольников, отсекаемых от треугольника ABC отрезками KL, LM и MK. 3. Указание. Сначала доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 можно отметить единственным образом так, чтобы выполнялись равенства из условия задачи.

Вар. 4. 1. 40°. 2. Указание. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания, лежащие на сторонах BC, CA и AB. Воспользоваться равенствами $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CB_1 = CA_1$ и указанием к задаче 3 из варианта 3. 3. $\angle A = 36°$, $\angle B = 36°$, $\angle C = 108°$. Указание. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда $\angle OAB = \frac{1}{2}\angle CAB$ и $\angle CAO = \angle ACO$.

С-3

Вар. 1. 1. Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABC = \triangle AED$. 2. Да, при $n = 6$. 3. $n = 7$. Указание. Сумма углов n-угольника равна сумме углов полученных треугольников.

Вар. 2. 1. Указание. Сначала доказать, что $\triangle BAF = \triangle CDE$. 2. Да, при $n = 4$. 3. $n = 6$. Указание. Сумма углов n-угольника равна сумме углов полученных треугольников.

Вар. 3. 1. Указание. Пусть A_1, B_1, ..., E_1 — точки касания сторон AB, BC, ..., EA с вписанной окружностью. Сначала доказать, что $BC + DE = CC_1 + BA_1 + EE_1 + DC_1$. 2. Указание. Из середины O отрезка AB провести перпендикуляр OO_1 к прямой CD и доказать, что $A_1O_1 = O_1B_1$ и $CO_1 = DO_1$. 3. Если бы у выпуклого многоугольника было 5 углов, каждый из которых меньше 108°, то сумма внешних углов этого многоугольника была бы больше $5 \cdot (180° - 108°) = 5 \cdot 72° = 360°$.

Вар. 4. 1. Указание. Воспользоваться тем, что отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны. 2. Указание. Из середины O отрезка AC провести перпендикуляр OO_1 к прямой BD и доказать, что $A_1O_1 = O_1C_1$ и $BO_1 = DO_1$. 3. Если бы у выпуклого многоугольника было 6 углов, каждый из которых меньше 120°, то сумма внешних углов этого многоугольника была бы больше $6 \cdot (180° - 120°) = 6 \cdot 60° = 360°$.

С-4

Вар. 1. 1. 3 см, 9 см, 3 см и 9 см. 2. 45°, 135°, 45° и 135°. 3. 4 см.

Вар. 2. 1. 65°, 115°, 65° и 115°. 2. 60°, 120°, 60° и 120°. 3. 3 см.

Вар. 3. 2. 3 см. Указание. Воспользоваться тем, что сумма оснований описанной трапеции равна сумме боковых сторон. 3. Указание. Сначала доказать равенство четырёх треугольников, вершинами каждого из которых являются вершина параллелограмма и центры двух квадратов, для которых эта вершина общая.

Вар. 4. 2. 4 см и 10 см. 3. Указание. В случае, когда $\angle A \neq 60°$, доказать равенство треугольников ABK, LDA и LCK.

С-5

Вар. 1. 1. 6 см и 8 см. 2. 8 см. 3. Указание. Сначала доказать, что четырёхугольник, вершины которого — середины сторон данного четырёхугольника, является прямоугольником.

Вар. 2. 1. 2 см и 3 см. 2. 8 см. 3. Указание. Сначала доказать, что четырёхугольник, вершины которого — середины сторон данного четырёхугольника, является прямоугольником.

Вар. 3. 1. 4 см и 8 см. 2. Указание. Сначала доказать, что четырёхугольник, вершинами которого служат середины диагоналей и середины сторон AB и CD, является прямоугольником. 3. Указание. Воспользоваться теоремой о пересечении медиан треугольника.

Вар. 4. **1.** 5 см и 13 см. **2.** Указание. Сначала доказать, что четырёхугольник, вершинами которого служат середины диагоналей и середины сторон AB и CD, является прямоугольником. **3.** Указание. Рассмотреть точки пересечения медиан треугольников ABC и ACD.

С-6*

Вар. 1. **1.** 1 : 3, считая от точки M. Указание. Сначала доказать, что отрезок B_1C_1 делит медиану, проведённую из вершины A, пополам. **2.** 45°. Указание. Пусть CC_1 — высота. Сначала доказать, что $\angle C_1HA = \angle C_1AH$. **3.** Указание. Воспользоваться тем, что точка, симметричная точке H относительно середины стороны AB, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Вар. 2. **1.** 1 : 2. **2.** 45°. Указание. Пусть AA_1 — высота. Сначала доказать, что $\angle A_1AB = \angle A_1BA$. **3.** Указание. Воспользоваться тем, что точки, симметричные точке H относительно середин сторон AB и AC, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

Вар. 3. **1.** 1 : 2, считая от точки A_1. **2.** Указание. Доказать, что середины отрезков, каждый из которых соединяет центр окружности, описанной около одного из рассматриваемых треугольников, с его ортоцентром, совпадают. **3.** Указание. Сначала доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABH и ABC, равны, а затем доказать, что в этих окружностях на дуги AH и BC опираются вписанные углы в 45°.

Вар. 4. **1.** Указание. Воспользоваться тем, что $B_1M : MB = 1 : 2$. **2.** Указание. Воспользоваться тем, что эти треугольники имеют общие основания высот. **3.** Указание. Сначала доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABH и ABC, равны, а затем доказать, что в этих окружностях на дуги AH и BC опираются вписанные углы в 45°.

С-7

Вар. 1. **1.** 30°, 60° и 90°. **2.** 1 см. **3.** 8 см.
Вар. 2. **1.** 45°, 45° и 90°. **2.** 1 см. **3.** 5 см.

Вар. 3. 1. 0,8. 2. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ и $2(\sqrt{3}-1)$. 3. Указание. Сначала выразить медиану треугольника через стороны, а затем воспользоваться теоремой Пифагора.

Вар. 4. 1. 6,25 см. 2. $\sqrt{6}$ и 2. 3. $\frac{3}{4}$. Указание. Сначала выразить медиану треугольника через его стороны.

С-8

Вар. 1. 1. $\sqrt{6}$. 2. Остроугольный. 3. 15 см и 20 см.

Вар. 2. 1. $2\sqrt{6}$. 2. Тупоугольный. 3. $3\frac{14}{17}$ см и $9\frac{3}{17}$ см.

Вар. 3. 1. $\sqrt{3}$. 2. 60°. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов. 3. 3 см. Указание. Воспользоваться теоремой о биссектрисе треугольника.

Вар. 4. 1. 6. 2. 120°. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов. 3. 10 см. Указание. Воспользоваться теоремой о биссектрисе треугольника.

С-9

Вар. 1. 1. 8. 3. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Вар. 2. 1. 20. 3. $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Вар. 3. 2. Указание. Сначала доказать, что $AB_1 : B_1C = AK : 2KM$ и $AC_1 : C_1B = AK : 2KM$. 3. Указание. Сначала доказать, что $\angle AB_1C_1 = \angle AHC_1 = \angle ABC$.

Вар. 4. 1. 42 см. 2. Нет. Указание. Рассмотреть наибольший из углов, образованных стороной треугольника и проведённой к ней медианой. 3. $\frac{ab}{d}$.

С-10

Вар. 1. 1. Указание. Воспользоваться теоремой о квадрате касательной. 2. $BK = 2$ см и $KC = 6$ см. Указание. Воспользоваться тем, что отрезок AK — биссектриса треугольника ABC. 3. 5 см.

Вар. 2. **1.** Указание. Воспользоваться теоремой о квадрате касательной. **2.** $BK = 4$ см и $KC = 6$ см. Указание. Воспользоваться тем, что отрезок AK — биссектриса треугольника ABC. **3.** Указание. Воспользоваться теоремой о квадрате касательной.

Вар. 3. **1.** 4. Указание. Сначала доказать, что точка C — середина отрезка AB. **2.** Указание. Сначала доказать, что $AD : BC = DM : BM$ и $AC : DB = AM : DM$. **3.** Указание. Сначала доказать, что треугольники ACE и ADC подобны.

Вар. 4. **1.** 6. Указание. Сначала доказать, что $AC : CB = 1 : 2$. **2.** Указание. Сначала доказать, что $AD : BC = DM : BM$ и $AC : BD = AM : DM$. **3.** Указание. Сначала доказать, что треугольники ACE и ADC подобны.

С-11

Вар. 1. **1.** 4 см. **2.** 25 см. **3.** $3\sqrt{5}$ см.

Вар. 2. **1.** 3 см и 4 см. **2.** 16 см. **3.** $4\sqrt{10}$ см.

Вар. 3. **1.** Внутри. Указание. Сначала доказать, что треугольник ABD остроугольный. **2.** $\frac{|a-b|}{2}$. **3.** $3\frac{3}{7}$.

Вар. 4. **1.** Вне. Указание. Сначала доказать, что треугольник ABD тупоугольный. **2.** 1. **3.** $\frac{ah}{a+h}$.

Контрольные работы

К-1

Вар. 1. **1.** Нет. **2.** 110°. **4.** $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ и $\angle C = 70°$.

Вар. 2. **1.** Да. **2.** 32°, 32° и 116°. **4.** $\angle BAO = 10°$ и $\angle CAO = 50°$.

Вар. 3. **1.** $\angle C = 90°$, $\angle M = 50°$ и $\angle N = 40°$. **3.** 36°.

Вар. 4. **3.** 108°. **4.** 50°.

К-2

Вар. 1. 3. $\angle A = 89°$, $\angle B = 84°$, $\angle C = 91°$ и $\angle D = 96°$. 4. 8 см и 16 см.

Вар. 2. 3. $\angle A = 60°$, $\angle B = 120°$, $\angle C = 110°$ и $\angle D = 70°$. 4. 4 см.

Вар. 3. 3. 30°.

Вар. 4. 3. $2a$.

К-3

Вар. 1. 1. 3. 2. 7. 3. 24. 4. 5 : 3.

Вар. 2. 1. 1 см. 2. 7. 3. 12. 4. 2 : 1.

Вар. 3. 2. $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$. 3. $\frac{a}{2\sin\alpha}$. 4. 7, 24 и 25.

Вар. 4. 2. $\frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4a + 2b}$. 3. $2d\sin\alpha$. 4. 5.

К-4

Вар. 1. 2. a, $a + b$, a и $a + b$. 4. $\frac{37}{40}$, $-\frac{37}{40}$, $\frac{5}{16}$ и $-\frac{5}{16}$.

Вар. 2. 2. 40 см. 4. $\frac{7}{8}$, $-\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{4}$.

Вар. 3. 2. 3 : 2, считая от точки A. 4. 1.

Вар. 4. 1. $\frac{2ab}{a + b}$. 2. 3 : 1, считая от точки A. 3. 15. 4. 6, 8 и 10.

Математические диктанты

МД-1

Вар. 1. 2. Параллельны. 3. На 4 части. 4. Да. 7. 130°. 8. 160°.

Вар. 2. 2. Перпендикулярны. 3. На 6 частей. 4. Нет. 7. 110°. 8. 80°.

МД-2

Вар. 1. 1. Диагональ. 3. 10 см. 4. Прямоугольник. 5. Да. 6. 3. 7. 6 см. 8. 6 см.

Вар. 2. 1. Сторона. 3. 4 см. 4. Ромб. 5. Да. 6. 4. 7. 3,5 см. 8. 4 см.

МД-3

Вар. 1. 1. AB к BC. 2. $-\frac{1}{2}$. 3. 0,8. 4. $2a\cos\frac{\alpha}{2}$. 5. $\frac{12}{13}$ и $\frac{5}{13}$. 6. 0,6. 7. 10. 8. 2,4.

Вар. 2. 1. AB к AC. 2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. 0,6. 4. $\dfrac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. 5. $\frac{7}{25}$ и $\frac{24}{25}$. 6. 0,8. 7. 8. 8. 2.

Примерные задачи к экзамену

3. 90°. 4. 1 см. 5. 7. 6. 40°. 8. 5 : 6. 9. 60°, 60° и 60°. 10. 30°, 70° и 80°. 11. Да. 17. 45°, 135°, 45° и 135°. 18. 60°, 120°, 60° и 120°. 19. 90°. 20. 85°, 95°, 85° и 95°. 21. 45°, 135°, 45° и 135°. 23. 12 см. 24. 5 см. 25. 1 см. 26. 1 : 2. 28. 1 : 2. 29. $\frac{1}{2}d$. 30. $\frac{5}{13}$. 31. $\frac{15}{17}$. 32. $\frac{20}{21}$. 33. $\frac{40}{41}$. 34. 45°, 45° и 90°. 35. 30°, 60° и 90°. 36. 90°. 37. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. 38. 33 см. 39. 6 см. 40. $\frac{\sqrt{13}}{13}$. 42. $2\sqrt{ab}$. 43. 6 см. 44. $b+\frac{cd}{a}$.

Тестовые задания

1. Г. 2. Б. 3. В. 4. В. 5. Б. 6. Б. 7. В. 8. Г. 9. В. 10. А. 11. Б. 12. В. 13. Г. 14. Б. 15. Б. 16. А.

Дополнительные задачи

1. Да. Указание. Каждая прямая должна быть параллельна двум другим прямым. 2. Указание. Сначала доказать, что $\angle EAD = \angle EDA$. 3. Указание. Пусть биссек-

триса угла C пересекает окружность в точке C_1. Доказать, что $\smile C_1AB_1 + \smile A_1C = 180°$. **4.** Указание. Сначала доказать, что $\angle CA_1B_1 = \angle A$ и $\angle OCB = 90° - \angle A$. **7.** а) Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда одна, две или три пары соответственных углов составляют в сумме 180°. б) Воспользоваться теоремой об углах с соответственно перпендикулярными сторонами и результатом задачи 7а). **8.** Нет. Да. **9.** Указание. Пусть точка O — точка пересечения биссектрисы угла B треугольника ABC и биссектрисы внешнего угла с вершиной C. Сначала доказать, что $OM = MB$ и $ON = NC$. **10.** Указание. Сначала доказать, что $\angle BEC = \angle ADC$. **11.** Указание. Отметить на луче BA точку P так, что $\angle BPC = 60°$, и воспользоваться утверждением задачи 10. **12.** Указание. Пусть O и O_1 — центры окружностей, вписанной в треугольник ABC и описанной около него. Построить окружность радиуса OO_1 с центром O и провести хорды O_1M и O_1N, параллельные сторонам AB и AC. **13.** Указание. Воспользоваться тем, что на дуги AC и A_1C_1 опираются углы ABC и $A_1B_1C_1$, которые либо равны, либо составляют в сумме 180°. **14.** Нет. **15.** Нет. **16.** Указание. Сначала провести среднюю линию треугольника. **18.** Указание. Сначала доказать, что $\angle ADP = \angle PAB = \angle ABC$. **19.** Указание. Учесть, что вершины 17-угольника, не лежащие на оси симметрии, можно разбить на пары симметричных друг другу вершин. **20.** Нет. Да. **21.** Указание. Сначала доказать, что середина диагонали второго параллелограмма лежит на отрезке, соединяющем середины противоположных сторон первого параллелограмма. **22.** $\frac{a}{4}$. **23.** Указание. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD. Сначала доказать, что прямые PM и QN параллельны прямой BC, и, следовательно, точки M и N лежат на отрезке PQ. **24.** Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения. **25.** Указание. Провести биссектрису AD треугольника ABC и через точку D провести прямые, параллельные прямым AB и AC. **26.** Указание. Сначала построить параллелограмм, одним из углов которого является данный угол, а данная точка является точкой пересечения его диагоналей. **27.** 7 см или 8 см. **28.** Воспользовавшись результатом задачи 2, доказать, что указанная прямая симметрична прямой BC относительно прямой AD. **29.** α, β и γ. Указание. Применить теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами. **30.** α, β и γ. Указание. Применить теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами. **31.** Ошибка состоит в том, что не рассмотрен случай, когда одна из точек E и F лежит не на стороне четырёхугольника, а на её продолжении. **32.** Указание. Пусть P и Q — середины сторон AB и CD. Сначала доказать, что $MO = PO = QO$. **34.** Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора. **35.** Да. **36.** 1. **37.** Указание. Пусть O — центр вписанной окружности, AA_1 — биссектриса треугольника ABC. Сначала доказать, что $AO : OA_1 = (AB + AC) : BC > 1$. **38.** Указание. Пусть O — центр окружности. Сначала доказать, что $\angle AOB + \angle COD = 180°$. **39.** Указание. Доказать, что $AM : AB = AN : BC$ и $\angle ABC = \angle MAN$. **40.** Указание. Воспользоваться формулами задачи 258 учебника. **41.** $\frac{2}{3}$. Указание. Сначала выразить радиус и диаметр вписанной окружности через основание треугольника и искомый угол. **42.** Указание. Сначала выразить c^2 и d^2 через a и b с помощью теоремы косинусов. **43.** $\frac{ac}{b}$. Указание. Воспользоваться утверждением задачи 7а), предварительно заметив следующее. Пусть точки K, L, M и N — основания перпендикуляров, проведённых из точки E к прямым AB, BC, CD и DA. В окружности с диаметром AE углы EKN и EAN опираются на одну дугу; в окружности с диаметром CE углы ELM и ECM опираются на одну дугу; в исходной окружности углы EAD и ECD опираются на одну дугу. Следовательно, углы EKN и ELM либо равны, либо составляют в сумме 180°. Аналогично углы ENK и EML, а также углы KEN и LEM либо равны, либо составляют в сумме 180°.

Содержание

Предисловие 3
Самостоятельные работы 5
Контрольные работы 21
Математические диктанты 35
Примерные задачи к экзамену 39
Тестовые задания 43
Дополнительные задачи 47
Ответы и указания 52

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович
Прасолов Виктор Васильевич

ГЕОМЕТРИЯ

Дидактические материалы

8 класс

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. А. Бессарабова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *Ю. Б. Григорьева, Л. А. Тимачёва*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 05.03.11. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 2,1. Тираж 2000 экз. Заказ № 342

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Ивановская областная типография». 153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

МГУ - ШКОЛЕ

Учебно-методический комплект авторов В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, В. В. Прасолова по геометрии для 8 класса содержит:

- Учебник под редакцией В. А. Садовничего
- **Дидактические материалы**
- Поурочные разработки

ISBN 978-5-09-023016-2

9 785090 230162

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО